Joachim Stiller

Einführung in die Logik

Ein Lehrbuch

Einführung in die Logik: Einleitung

Was heißt "Logik"?

In der Neuzeit hatte ich die Auffassung durchgesetzt, Logik sei die Kunst des (formal) richtigen Denkens. So sagt Kant etwa: Logik ist die "Wissenschaft von den notwendigen Gesetzen des Verstandes und er Vernunft überhaupt oder, welches einerlei ist, von der bloßen Form des Denkens überhaupt".

Demgegenüber war in der moderne Logik lange Zeit der Auffassung vorherrschend, Logik sei die Lehre des "formal" richtigen Schließens.

Diese beiden Grunddefinitionen wollen wir nun zusammendenken und in einer einzigen Synthese zusammenzuführen. Die dabei entstehende folgende Definition ist heute die allgemein gebräuchliche:

Logik ist die Lehre des formal richtigen Denkens und Schließens.

Der Begriff "Aussage"

Eine "Aussage" ist eine Ansammlung von Zeichen, Lauten oder Ähnlichem, bei der man auf Grundlage von anderen Ansammlungen von Zeichen oder Ähnlichem entscheiden kann, ob sie wahr ist.

Eine Aussage wäre: "Es regnet oder es regnet nicht." Den Wahrheitsgehalt solcher Aussagen kann man allerdings auch ohne andere Aussagen bestimmen, da sie immer wahr sind. Wenn es nicht regnet, kann es nicht regnen, und wenn es nicht nicht regnet, muss es regnen. So etwas nennt man eine "Tautologie".

Befehle, Fragen oder Ausrufe sind zum Beispiel keine Aussagen. Man kann von so etwas wie "Lass es regnen!", "Regnet es?" oder "Ah!" keinen Wahrheitswert bestimmen. Ausrufe wie "Regen!" sind natürlich auch keine Aussagen. Wenn man so etwas im Alltag sagt, schwingt aber immer eine Aussage mit. In der Logik wird man sich jedoch nicht mit mitschwingenden Aussagen beschäftigen.

Außerdem sind Sätze mit falscher Grammatik keine Aussagen, denn es ist unmöglich, etwas wie „Ich Katze unwahr nicht sein du zu“ einen Wahrheitswert zuordnen. Durch Rechtschreibfehler bleibt eine Aussage generell eine Aussage, denn es sind in der Logik sowieso keine Wörter außer Junktoren und Quantoren definiert. Lediglich wenn es dadurch zu einer falschen Grammatik kommt, wären sie verboten.

Der Begriff "Urteil" ist so heute nicht mehr gebräuchlich. Er findet zumeist nur dann Anwendungen, wenn es um Kant und die *Kritik der reinen Vernunft* (KdrV) geht. Der Begriff "Urteil" ist also eigentlich nur in einem historischen Kontext von Bedeutung.

Name	**Beispiel**	**Mitschwingende Aussage**
Befehl	Fahr langsamer!	Ich will, dass du langsamer fährst.
Frage	Wie heißt du?	Ich will, dass du mir sagst, wie

		du heißt.
Ausruf *(streng genommen grammatikalisch nicht korrekt)*	Häh?	Ich verstehe das nicht.
	Feuer!	Da ist Feuer.
Grammatikalisch nicht Korrektes	Das ist Tom seins.	Das ist Toms.

Elementaraussagen

Der Begriff "Elementarsatz" geht unmittelbar auf Wittgensteins für die Entwicklung der Aussagnelogik wichtigen *Tractatus logico-philosophicus* zurück. Unter einem Elementarsatz oder einer Elementaraussage versteht man die kleinste sprachliche Einheit, die noch einen Wahrheitswert annehmen und somit wahr oder falsch sein kann.

Variablen

Eine "Variable" ist in der formalen Logik ein sprachliches Zeichen, für das beliebige Ausdrücke einer bestimmten Art eingesetzt werden können. Im Gegensatz zu logischen Konstanten haben Variablen keine selbständige Bedeutung. und sind bedeutungsleere Zeichen, die nur dazu dienen, die Stellen anzuzeigen, an denen die bedeutungsvollen Konstanten ... einzusetzen sind.

Welche Ausdrücke für eine Variable eingesetzt werden dürfen, wird durch eine vorgegebene Menge von Elementen bestimmt. Diese wird *Grund-, Objekt-, Definitions- oder Variabilitätsbereich* oder *Extension* einer Variablen genannt.

Die Ausdrücke, die für bestimmte Variable eingesetzt werden dürfen, heißen auch *Werte* dieser Variablen. Variablen repräsentieren ihre Werte. Man sagt auch, dass die Variablen die Menge der Gegenstände, die durch die Konstanten (ihre Werte) bezeichnet werden, durchlaufen."

Junktoren

Ein "Junktor" (von lat. iungere „verknüpfen, verbinden“) ist eine logische Verknüpfung zwischen Aussagen innerhalb der Aussagenlogik, also ein logischer Operator. Junktoren werden auch Konnektive, Konnektoren, Satzoperatoren, Satzverknüpfer, Satzverknüpfungen, Aussagenverknüpfer, logische Bindewörter, Verknüpfungszeichen oder Funktoren genannt und als logische Partikel klassifiziert.

Sprachlich wird zwischen der jeweiligen Verknüpfung selbst (zum Beispiel der Konjunktion) und dem sie bezeichnenden Wort beziehungsweise Sprachzeichen (zum Beispiel dem Wort "und" beziehungsweise dem Zeichen "$\wedge$") oft nicht unterschieden.

Quantoren

Ein "Quantor" oder "Quantifikator", die Re-Latinisierung des von C. S. Peirce eingeführten Ausdrucks "quantifier", ist ein Operator der Prädikatenlogik. Neben den Junktoren sind die Quantoren Grundzeichen der Prädikatenlogik. Allen Quantoren gemeinsam ist, dass sie Variablen binden.

Die beiden gebräuchlichsten Quantoren sind der Existenzquantor (in natürlicher Sprache zum Beispiel als "mindestens ein" ausgedrückt) und der Allquantor (in natürlicher Sprache zum Beispiel als "alle" oder "jede/r" ausgedrückt). Andere Arten von Quantoren sind Anzahlquantoren wie "ein" oder "zwei", die sich auf Existenz- beziehungsweise Allquantor zurückführen lassen, und Quantoren wie "manche", "einige", "wenige" oder "viele", die auf Grund ihrer Unbestimmtheit in der klassischen Logik nicht verwendet werden.

Die logische Form

(1) Die einfachste *aussagenlogische Form* einer Aussage erhält man durch Einsetzung von Aussagenvariablen für alle elementaren Teilaussagen der Aussage, durch Einsetzung von Junktoren für die grammatischen Konjunktionen der Aussage sowie durch Klammerung zur sinngemäßen Gliederung komplexer Aussagen.

(2) Die einfachste *prädikatenlogische Form* einer Aussage erhält man durch Einsetzung von Prädikatorvariablen für alle Prädikatoren der Aussage, durch Einsetzung von Quantoren für die Ausdrücke "alle", "einige" und "keines" mit geeigneter Quantifizierung sowie durch geeignete Klammersetzung zur sinngemäßen Gliederung komplexer Aussagen.

Folgerungen, Argumente, Schlüsse

Ein Argument (ein Schluss) besteht auf einer Menge von Prämissen und einer Konklusion, wobei Prämissen und Konklusionen stets Aussagen sind. Das Argument ist wahr, wenn die Konklusion logisch aus den Prämissen folgt. Die Folgerung (das Argument, der Schluss) muss wahr sein, wenn die Prämissen und Bedeutungen von Junktoren und Quantoren sowie evtl. Details der Sprache, aber nichts anderes gegeben sind.

Es gibt zwei Arten von Folgerungen:

Semantische Folgerungen

In dieser Folgerungsart guckt man sich alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte der Elementaraussagen an. Damit das Argument wahr ist, muss die Konklusion bei allen Belegungen mit Wahrheitswerten der Elementaraussagen wahr sein.

Syntaktische Ableitungen

Bei der syntaktischen Ableitung leitet man mit Hilfe eines Kalküls ab. Ein Kalkül besteht aus Axiomen und Transformationsregeln. Die Axiome sind Aussagen, die man zu den Prämissen hinzufügen kann. Die Transformationsregeln sind Aussagen, bei denen aber manchmal Platzhalter statt Teilaussagen stehen. Dadurch sind sie keine Aussagen mehr. Wie die Axiome kann man die Transformationsregeln beliebig zu den Prämissen hinzufügen und entfernen. Allerdings muss man zuvor die Platzhalter durch Prämissen oder Folgerungen von Prämissen ersetzt haben. Durch diese beiden Aktionen kann man Konklusionen ableiten. Ein Kalkül ist in der Regel so, dass die Ableitung nach diesem Kalkül den gleichen Wahrheitswert hat wie eine semantische Folgerung mit den gleichen Prämissen und der gleichen Konklusion, wenn keine Quantoren in den Prämissen oder der Konklusion enthalten sind. Bei Quantoren ist so etwas in einigen Fällen gar nicht möglich. Wann genau, werden wir später sehen.

Der Begriff "Gültigkeit" (logische Wahrheit)

Eine Aussage ist gültig, wenn sie unabhängig davon, wie die Wörter bzw. Zeichen in ihr definiert sind, wahr ist. Eine gültige Aussage (logische Wahrheit) wird auch Tautologie genannt. Logische Wahrheiten sind somit immer tautologisch.

Bedeutungen von Aussagen

In der Logik ist es nicht möglich, eine Menge von Prämissen so zu gestalten, dass eine Aussage eine einzelne echte Bedeutung erhält, also wirklich für etwas in der realen Welt steht, denn dafür müsste man sie eindeutig definieren.

Aber wenn ich ein Wort definiere, dann kommen in der Definition weitere Wörter vor. Diese müssen in den Prämissen wieder definiert werden. In der Definition kommen wieder Wörter vor, die definiert werden müssen. Irgendwann haben wir keine andere Möglichkeit mehr, als ein Wort in der Definition zu benutzen, dessen Bedeutung von eben dieser Definition abhängt, da unser Wortschatz endlich ist. Man versucht, ein Wort mit sich selbst zu erklären. Das führt zu einem Zirkelschluss.

Als Einwand könnte man jetzt einbringen, Junktoren und Quantoren seien ja bereits mit einer Bedeutung versehen. Aber Junktoren und Quantoren verknüpfen nur Teilaussagen, deren Bedeutung auch gegeben sein muss, damit die Aussage eine Bedeutung erhält.

So hat jede Aussage der Logik eine unendliche oder leere (wenn sie widersprüchlich ist) Menge an möglichen Bedeutungen. Allerdings gibt es in er Regel Bedeutungen, die eine Aussage nicht haben kann, sogar unendlich viele. Also gibt es meistens unendlich viele mögliche und unendlich viele nicht mögliche echte Bedeutungen der Aussagen.

Probleme mit der natürlichen Sprache

Wenn man Logik betreibt, benutzt man in der Regel nicht die natürliche Sprache, sondern eine für die Logik entwickelte.

Das liegt zum ersten daran, dass die natürliche Sprache einfach unpraktisch ist. Junktoren und Quantoren stechen nicht aus der Sprache heraus, und es gibt seltsame Fälle wie: „Katzen und Hunde sind süß“. Hier verbindet das „und“ das Wort „Katzen“ mit der Aussage „Hunde sind süß“. Junktoren verbinden aber immer nur Aussagen. Streng genommen ist der Satz nur eine Abkürzung für „Katzen sind süß und Hunde sind süß“, trotzdem macht man es sich unnötig schwer. Die Satzstruktur muss manchmal umgestellt werden, was die Arbeit auch nicht gerade erleichtert. In der natürlichen Sprache haben auch andere Wörter als Junktoren und Quantoren eine Bedeutung; diese ist in Argumenten allerdings nicht definiert. Es kann allerdings schwer sein, sich diese wegzudenken. Außerdem liegt es an Mehrdeutigkeiten im Satzbau (die in den Wörtern selbst behebt die formale Sprache auch nicht).

Beispiele für Mehrdeutigkeiten:

Satz	Interpretationsmöglichkeiten
Alle haben einen Stein.	Jeder hat genau einen Stein. Jeder hat mindestens einen Stein. Alle haben denselben Stein und sonst keinen. Alle haben denselben Stein, eventuell auch andere.
Man kann leben und nicht leben.	Es ist möglich zu leben und es ist möglich, nicht zu leben. Es ist möglich, gleichzeitig zu leben und nicht zu leben.
Es regnet oder es schneit.	Es regnet, es schneit oder beides. Entweder es regnet oder es schneit.
Sie sieht Markus auf dem Berg mit einem Fernrohr.	Sie sieht Markus, der auf dem Berg ist, und sie benutzt dafür ein Fernrohr. Sie sieht Markus, der ein Fernrohr hat und der auf dem Berg ist. Sie sieht Markus, der auf dem Berg ist, und der Berg ist mit einem Fernrohr ausgestattet. Sie sieht Markus, sie benutzt dafür ein Fernrohr und ist auf dem Berg. Sie sieht Markus, der ein Fernrohr hat, und ist auf dem Berg. Sie sieht Markus und ist auf dem Berg, der mit einem Fernrohr ausgestattet ist.

Arten von Logik

Die "normale" Logik ist die sogenannte klassische Logik. Solche klassichen Logiken sind die Aussagenlogik, die Prädikatenlogik und die Syllogistik. Bei allen übrigen Logiken spricht man von nichtklassischen Logiken

Darüber hinaus unterscheidet man ganz grundsätzlich zwischen zweiwertiger Logik und Mehrwertiger Logik.

Aussagenlogik

Die "Aussagenlogik" geht vor allem auf Frege zurück. Frege arbeitete sie in seiner berühmten *Begriffsschrift* aus. Die Aussagenlogik wurde später von Russel weiterentwickelnt, noch später von Wittgenstein im *Tractatus logico-philosophicus*. Mit diesem neuen Teilgebiet der Logik beginnt die moderne Logik, die auch mathematische oder Symbollogik genannt wird. Bei der Aussagenlogik geht es um Verknüpfungen von Elementarsätzen (Wittgenstein), die durch symbolische Variablen ersetzt werden, mittels so genannter "Junktoren", den Aussageverknüpfungen. Auf diese Weise kann man die Wahrheitswerte komplexer Aussagen immer genau bestimmten, wenn die Wahrheitswerte der Elementaraussagen bekannt sind. Die Wahrheitswerte bestimmt man mit Hilfe so genannter Wahrheitstafeln.

Um die Aussagenlogik soll es in Kapitel 3 gehen.

Prädikatenlogik

Die "Prädikatenlogik" bzw. "Quantorenlogik" wurde unabhängig voneinander von Frege in seiner berühmten *Begriffsschrift* und von Peirce entwickelt. Genau genommen handelt es sich um eine ganze Familie von Theorien, die ein Wichtiges Teilgebiet der Logik, aber auch der Mathematik darstellt. Bei der Prädikatenlogik zerlegt man, anders als in der Aussagenlogik, elementare Aussagensätze (Wittgenstein) in Subjekt und Prädikat, für die je ein eigenes Symbol gewählt wird. Das Besondere ist, dass man diese symbolischen Elementaraussagen durch so genannte "Quantoren" ergänzt. Man unterscheidet einen Allquantor ("Alle Menschen sind sterblich") und einen Existenzqunator ("Einige Äpfel sind grün"). Auf diese Weise sind differenziertere logische Aussagen möglich als mit der bloßen Aussagenlogik, und daher stellt die Prädikatenlogik auch eine Erweiterung der Aussagenlogik dar.

Um die Prädikatenlogik soll es in Kapitel 4 gehen.

Syllogistik

Bei Wikipedia heißt es:

"Als "Syllogistik" wird allgemein die Lehre von den Syllogismen bezeichnet. Die klassische Logik untersuchte insbesondere, unter welchen Voraussetzungen Syllogismen gültig sind. Syllogismen sind immer nach dem gleichen Muster aufgebaut. Jeweils zwei Prämissen (Voraussetzungen), Obersatz und Untersatz genannt, führen zu einer Konklusion (Schlussfolgerung). Die Prämissen und die Konklusion sind Aussagen von einem bestimmten Typ, in denen jeweils einem Begriff, dem syllogistischen Subjekt, ein anderer Begriff, das syllogistische Prädikat (nicht gleichbedeutend mit Subjekt und Prädikat in der Grammatik), in bestimmter Weise zu- oder abgesprochen wird. In Abhängigkeit von der Stelle, an der sie im Syllogismus auftreten, werden die vorkommenden Begriffe Oberbegriff, Mittelbegriff und Unterbegriff genannt."

Um die Syllogistik soll es abschließend in Kapitel 5 gehen.

Modallogik

Die "Modallogik" untersucht die formale Darstellbarkeit und die logischen und linguistischen Gehalte von Modalsätzen. Dabei spielen die folgenden schon von Kant her bekannten Modalitäten eine zentrale Rolle: "möglich", "nicht mögliche" (unmöglich) "notwendig" und "nicht notwendig" (zufällig). Genau genommen handelt es sich bei der Modallogik um eine ganze Familie von logischen Systemen. Die Modallogik wurde historisch auf ganz unterschiedliche Weise ausgearbeitet. Erst 1963 konnte Saul A. Kripke die Modallogik als ein einheitliches System grundlegen. Dennoch gibt es auch weiterhin verschiedene Subsysteme, die teilweise im Widerspruch zueinander stehen.

Deontische Logik

Die "deontische Logik untersucht die formale Darstellbarkeit und die logischen und linguistischen Gehalte normativer (deontischer) Sätze.

Epistemische Logik

"Die "epistemische Logik" (von griechisch 'Wissen'), auch Wissenslogik, untersucht die formale Darstellbarkeit und die logischen und linguistischen Gehalte von Glaubenssätzen. Die epistemische Logik fällt zumeist mit der doxologischen Logik zusammen.

Temporale Logik

Die "temporale Logik" oder "Zeitenlogik" untersucht die formale Darstellbarkeit und die logischen und linguistischen Gehalte zeitenlogischer Sätze. Die temporale Logik ist eine mehrwertige Logik.

Fuzzylogik

Die "Fuzzylogik" ("unscharfe Logik", "unscharfe Theorie") ist eine Logik,, die versucht, auch Unsicherheiten wie "ein bisschen", "ziemlich", "stark", "sehr" usw. formal darzustellen. Die Fuzzylogik ist eine mehrwertige Logik.

Interogativlogik

Die "Interogativlogik" oder "erotetische Logik" untersucht die formale Darstellbarkeit und die logischen und linguistischen Gehalte von Fragesätzen. Beispiel: Frage: p? Antwort: p!

Quantenlogik

Die Quantenlogik untersucht die Frage, ob die Struktur mikrophysikalischer bzw. quantenphysikalischer Prozesse eine andersgeartete, neue Logik notwendig macht. Stichworte sind hier die "Superposition" und die "Verschränkung" von Teilchen. Außerdem wird der Stellenwert der Quantenphysik im Weltganzen untersucht, der mit dem neuen ontologischen Status verbunden ist.

Aussagenlogik

Die "Aussagenlogik" geht vor allem auf Frege zurück. Frege arbeitete sie in seiner berühmten *Begriffsschrift* aus. Die Aussagenlogik wurde später von Russel weiterentwickelnt, noch später von Wittgenstein im *Tractatus logico-philosophicus*. Mit diesem neuen Teilgebiet der Logik beginnt die moderne Logik, die auch mathematische oder Symbollogik genannt wird. Bei der Aussagenlogik geht es um Verknüpfungen von Elementarsätzen (Wittgenstein), die durch symbolische Variablen ersetzt werden, mittels so genannter "Junktoren", den Aussageverknüpfungen. Auf diese Weise kann man die Wahrheitswerte komplexer Aussagen immer genau bestimmten, wenn die Wahrheitswerte der Elementaraussagen bekannt sind. Die Wahrheitswerte bestimmt man mit Hilfe so genannter Wahrheitstafeln.

Elementaraussagen

Der Begriff "Elementarsatz" geht unmittelbar auf Wittgensteins für die Entwicklung der Aussagnelogik wichtigen *Tractatus logico-philosophicus* zurück. Unter einem Elementarsatz oder einer Elementaraussage versteht man die kleinste sprachliche Einheit, die noch einen Wahrheitswert annehmen und somit wahr oder falsch sein kann.

Variablen

Bei Wikipedia heißt es:

"Eine *Variable* ist in der formalen Logik ein "sprachliches Zeichen, für das beliebige Ausdrücke einer bestimmten Art eingesetzt werden können". Im Gegensatz zu logischen Konstanten haben Variablen keine selbständige Bedeutung". und sind "bedeutungsleere Zeichen, die nur dazu dienen, die Stellen anzuzeigen, an denen die bedeutungsvollen Konstanten ... einzusetzen sind."

Welche Ausdrücke für eine Variable eingesetzt werden dürfen, wird durch eine vorgegebene Menge von Elementen bestimmt. Diese wird *Grund-, Objekt-, Definitions- oder Variabilitätsbereich* oder *Extension* einer Variable genannt.

Die Ausdrücke, die für bestimmte Variable eingesetzt werden dürfen, heißen auch *Werte* dieser Variablen. Variablen repräsentieren ihre Werte. Man sagt auch, dass die Variablen die Menge der Gegenstände, die durch die Konstanten (ihre Werte) bezeichnet werden, durchlaufen."

In der Aussagenlogik verwendet man Variablen für die einzelnen Elementaraussagen. So sind entweder kleine Buchstaben gebräuchlich (p, q, r usw.) oder auch große Buchstaben (A, B, C usw.)

Wahrheitstabellen

Eine Wahrheitswertetabelle oder kurz Wahrheitstabelle sieht meist ungefähr so aus:

p	**q**	**p ∧ q**
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Links stehen die möglichen Wahrheitswerte der Elementaraussagen und rechts, welchen Wahrheitswert die Gesamtaussage dann hat. Man kann daraus auch ablesen, welchen Wert ein Atom hat, wenn der Wahrheitswert der anderen Atome und der Gesamtaussage gegeben sind.

Die Junktoren

In der formalen Sprache, die wir in diesem Buch hauptsächlich verwenden, gibt es sechs Junktoren. Insgesamt gibt es sogar siebzehn Junktoren, einen zweistelligen und 16 Dreistellige, für jede denkbare Wahrheitstabelle einen, aber nur die folgenden sechs sind allgemein gebräuchlich:

Die Negation bzw. das "Nicht"

Dieser Junktor wird ¬ geschrieben. In der natürlichen Sprache entspricht ¬ p "nicht p". Er kehrt den Wahrheitswert der Aussage hinter ihm um. Die Negation ist der einzige in diesem Buch verwendete Junktor, zu dem nicht zwei Aussagen gehören. Daher nennt man ihn auch einen "zweistelligen Junktor".

Wahrheitstabelle:

p	**¬ p**
w	f
f	w

Die Konjunktion bzw. das "Und"

Diesen Junktor schreiben wir ∧. Die sprachliche Entsprechung von p ∧ q ist "p und q". Eine Konjunktion ist also nur wahr, wenn sowohl die Aussage davor als auch die danach wahr ist.

Wahrheitstabelle:

p	**q**	**p ∧ q**
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Disjunktion bzw. das "Oder"

Dieser Junktor wird ∨ geschrieben. Zu vergleichen ist p ∨ q mit "p oder q", allerdings nicht mit dem im Sinne von "entweder p oder q (nicht beides)" sondern mit der gewöhnlichen Bedeutung, in der auch beide zugehörigen Aussagen wahr sein dürfen. Das "entweder p oder q" wird auch "Exklusion"genannt.

Wahrheitstabelle:

p	**q**	**p ∨ q**
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Disjunktion ist unwahr, wenn die Aussage davor und die danach Unwahr ist und ansonsten wahr.

Die Implikation bzw. das "Immer-Wenn-Dann"

In diesem Buch schreiben wir die Implikation mit →. Man kann p → q mit „wenn p, dann q“ übersetzen.

Wahrheitstabelle:

p	**q**	**p → q**
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Zur Erklärung gucken wir uns am besten einen Beispielsatz an: „Wenn morgen die Sonne scheint, ist es morgen heiß“. Angenommen die Sonne scheint und es ist heiß, ist die Aussage offensichtlich war. Wenn die Sonne scheint und es nicht heiß ist, ist die Aussage offenbar unwahr. Wenn die Sonne nicht scheint, ist die Bedingung dafür, dass das zweite Atom nach dieser Aussage unbedingt wahr ist, überhaupt nicht gegeben. Daher ist es in dem Fall irrelevant, ob die Sonne scheint oder nicht, die Aussage ist wahr. Wenn man die Aussage „Immer wenn die Sonne scheint, ist es heiß.“ nimmt, widerspricht es ihr ja nicht, wenn es einmal heiß ist, und die Sonne nicht scheint, solange es immer noch bzw. wieder heiß ist, wenn die Sonne scheint.

Die Replikation bzw. das "Nur-Wenn-Denn"

In diesem Buch schreiben wir die Implikation mit ←. Man kann p ← q mit "nur wenn p, dann q" übersetzen.

Wahrheitstabelle:

p	**q**	**p ← q**
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Zur Erklärung gucken wir uns am besten einen Beispielsatz an: „Nur wenn morgen die Sonne scheint, wasche ich morgen das Auto“. Angenommen die Sonne scheint und ich wasche das Auto, ist die Aussage offensichtlich wahr. Wenn die Sonne scheint und ich wasche das Auto nicht, ist die Aussage ebenfalls wahr. Nur wenn die Sonne nicht scheint, und ich wasche das Auto trotzdem, ist die Aussage falsch.

Die Äquivalenz bzw. das "Genau-Dann-Wenn"

Die Äquivalenz wird formal ↔ geschrieben. Die natursprachliche Entsprechung zu p ↔ q st „q genau dann, wenn p“. Sie ist dann wahr, wenn sowohl die Aussage davor, als auch die danach wahr ist oder beide falsch sind. Ansonsten ist sie falsch.

Wahrheitstabelle:

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die (logische) Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn "entweder" p "oder" q wahr sind. Ansonsten ist sie falsch.

Man sollte verstanden haben, warum diese Wahrheitstabellen genau so aussehen und was die Junktoren dann bedeuten, dann muss man sie auch nicht auswendig lernen. Auf jeden Fall sollte man sie aber rekonstruieren können.

Notwendige und hinreichende Bedingung

Seien p und q Sachverhalte;

(1) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): "immer" wenn p, dann q (Implikation); dann heißt p hinreichende Bedingung für q .

(2) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): "nur" wenn p, dann q (Replikation); dann heißt p notwendige Bedingung für q.

Im Falle begrifflicher Abhängigkeitsverhältnisse erlaubt die Kenntnis, dass p hinreichend für q den Schluss, dass q notwendig für p ist, und umgekehrt.

Klammern und Klammerregeln

Die Klammern haben eigentlich die gleiche Bedeutung wie in der Mathematik. Die Ausdrücke in den Klammern werden zuerst ausgewertet. Ausdrückliche Klammerregeln sind wohl wenig sinnvoll, denn grundsätzlich muss es möglich sein, die Klammen frei zu setzen, und wenn ich eine Veränderung der Klammersetzung vornehme, ergibt sich auch eine komplett andere Aussage. Wir wollen es in dieser Einführung so handhaben, dass "immer" Klammern gesetzt werden, wo es sinnvoll ist. Eine Wertigkeit der Junktoren, wie bei der Regel "Punktrechnung geht vor Strichrechnung" in der Mathematik, erübrigt sich hier also.

Die aussagenlogische Form

Die einfachste *aussagenlogische Form* einer Aussage erhält man durch Einsetzung von Aussagenvariablen für alle elementaren Teilaussagen der Aussage, durch Einsetzung von Junktoren für die grammatischen Konjunktionen der Aussage sowie durch Klammerung zur sinngemäßen Gliederung komplexer Aussagen.

Übersetzung in die aussagenlogische Form

Will man eine komplexe aussage in die aussagenlogische Form übersetzen, muss man zuerst Anpassungen an der Sprache vornehmen, wie das Benutzen von Junktoren der formalen Sprache.

Beispiel:
Wenn gilt, dass ich nicht nach Hause fahre sondern gehe, dann friere ich und werde nass.

⇔ Wenn gilt, dass ich nicht nach Hause fahre und ich nach Hause gehe, dann gilt, dass ich friere und nass werde.

⇔ Ich fahre nicht nach Hause und ich gehe nach Hause ⇒ ich friere und ich werde nass.

⇔ Ich fahre nicht nach Hause $\wedge$ ich gehe nach Hause ⇒ ich friere $\wedge$ ich werde nass.

⇔ ¬ ich fahre nach Hause $\wedge$ ich gehe nach Hause ⇒ ich friere $\wedge$ ich werde nass.

Und jetzt endlich die eigentliche aussagenlogische Form:

⇔ $\neg p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$

Und ganz noch die richtige Klammersetzung:

⇔ $(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$

Rückübersetzung in die sprachliche Form

Wenn man die formale Sprache in die natürliche Sprache übersetzen will, kann es hilfreich sein, schrittweise vorzugehen. Als erstes übersetzt man den Junktor, der von keiner Klammer umgeben ist (oder von den wenigsten, für den unwahrscheinliche Fall, dass die ganze Aussage in Klammern steht), anschließend die mit den zweitwenigsten und so weiter. Anschließend ersetzt man die Satzsymbole eventuell durch Wörter, die auch für ein reales Objekt stehen. Dann kann man vielleicht noch verschiedene andere Verbesserungen vornehmen, die man dann intuitiv machen kann.

Beispiel:
$(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((s \vee t) \wedge \neg (s \wedge d))$

⇔ Wenn $(p \wedge (q \vee r))$ gilt, dann gilt $((s \vee t) \wedge \neg (s \wedge d))$

⇔ Wenn p gilt und $q \vee r$ gilt, dann gilt $s \vee t$ und es gilt $\neg (s \wedge t)$

⇔ Wenn p gilt und q oder r gilt, dann gilt s oder t und es gilt nicht $s \wedge t$

⇔ Wenn p gilt und q oder r gilt, dann gilt s oder t und es gilt nicht s und t

Jetzt müssen nur noch die Variablen ersetzt werden. Für p = "Ich gehe in die Stadt", q = "Ich habe Geld dabei", r = "Ich habe eine Kreditkarte dabei", s = "Ich kaufe ein Hemd", t = "Ich kaufe ein T-Shirt" ergibt sich die folgende sprachliche Form:

⇔ Wenn gilt, dass ich in die Stadt gehe und es gilt, dass ich Geld dabeihabe oder eine Kreditkarte dabeihabe, dann gilt, dass ich ein Hemd kaufe oder ein T-Shirt kaufe und es gilt nicht, dass ich ein Hemd kaufe und ein T-Shirt kaufe.
Oder etwas eleganter:

⇔ Wenn ich in die Stadt gehe, und Geld oder eine Kreditkarte dabeihabe, dann kaufe ich entweder ein Hemd oder ein T-Shirt.

Das seltsame "gilt", das in den Sätzen vorkam ist ein Trick, um klarzumachen, wie die Junktoren der natürlichen Sprache geklammert werden müssen. In der gesprochenen Sprache gibt es dafür Betonungen, an denen man das feststellen kann, in der geschriebenen wäre zum Beispiel der vorletzte Schritt mehrdeutig.

Im Satz "Ich gehe in die Stadt und habe Geld oder eine Kreditkarte dabei" wurde das Verb "habe dabei" beim Teil mit dem Geld dabeihaben weggelassen. Dadurch ist klar, dass "habe" Geld oder eine Kreditkarte "dabei" eine Elementare Einheit ist, und die Klammern direkt darum gemacht werden müssen.

Erstellen von Wahrheitstabellen

Thomas Zoglauer schreibt in seiner *"Einführung in die Logik für Philosophien"*:

"Jede komplexe Aussageform lässt sich in einer Wahrheitstafel in ihre Wahrheitswerte entwickeln. Hierzu gibt man den Wahrheitswert der ganzen Aussage in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Aussagenvariablen an. Enthält die Aussage 2 Wahrheitswerte, so sind 4 Fälle möglich, bei 3 Variablen muss man 8 Fallunterscheidungen machen usw."

Beispiel:

Wir wollen die Wahrheitstafel von ¬ p ∧ (q → p) aufstellen.

p	**q**	**¬ p**	**q → p**	**¬ p ∧ (q → p)**
w	w	f	w	f
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Ergebnis: Die Aussageform ¬ p ∧ (q → p ist genau dann wahr, wenn p und q wahr sind. Ansonsten ist sie falsch.

Und weiter schreibt Zoglauer:

"Eine Aussageform heißt *Tautologie*, wenn sie für jede Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten einen wahren Ausdruck liefert. Man sagt auch: Der Ausdruck ist allgemeingültig (oder tautologisch)."

Beispiel:

Wir wollen zeigen, dass ((p → q) ∧ p) → q eine Tautologie ist.

p	**q**	**p → q**	**(p → q) ∧ p /**	**((p → q) ∧ p) → q**
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Ergebnis: Die Aussageform ((p → q) ∧ p) → q liefert "immer" einen wahren Ausdruck. Damit handelt es sich bei ihr um eine Tautologie. Die Aussageform ist tautologisch.

Und am Ende schreibt Zoglauer:

"In der Wahrheitswertentwicklung des Ausdrucks (d.h. in der letzten Spalte der Wahrheitstafel) tauchen nur die Werte w auf. Solche tautologischen Gesetze kennzeichnet man dadurch, dass man das Zeichen ⊢ davor setzt."

Tautologien in der Aussagenlogik

Eine Tautologie ist in der Logik eine allgemein gültige Aussage, das heißt eine Aussage, die aus logischen Gründen immer wahr ist.

Weiter heißt es bei Wikipedia:

"Beispiele für Tautologien sind Aussagen wie "Wenn es regnet, dann regnet es" oder die tautologische sowie zirkuläre Aussage des Intelligenzforschers Edwin Boring aus dem Jahr 1924: "Intelligenz ist das, was der Intelligenztest misst."

Teilweise wird der Begriff Tautologie für alle Arten von allgemeingültigen Aussagen verwendet, teilweise wird er auf solche Aussagen eingeschränkt, die in der zweiwertigen, klassischen Aussagenlogik allgemein gültig sind. Im letzteren, aussagenlogischen Sinn ist eine zusammengesetzte Aussage genau dann eine Tautologie, wenn sie wahr ist unabhängig davon, ob die Teilaussagen, aus denen sie zusammengesetzt ist, ihrerseits wahr oder falsch sind."

Beispiele für Tautologien sind:

- $\vdash (p \lor q) \leftrightarrow (p \lor q)$
- $\vdash p \lor \neg p$

Tabelle der wichtigsten Tautologien der Aussagenlogik

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Tautologien der Aussagenlogik:

• $\vdash p \lor \neg p$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
• $\vdash \neg (p \land \neg p)$	Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch
• $\vdash p \rightarrow p$	Einfache Tautologie
• $\vdash p \leftarrow p$	Einfache Tautologie
• $\vdash (p \land q) \rightarrow p$	Konjunktionsbeseitigung
• $\vdash p \rightarrow (p \lor q)$	
• $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Paradoxie der Implikation
• $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	Paradoxie der Implikation
• $\vdash p \leftarrow (\neg q \land q)$	Paradoxie der Replikation
• $\vdash (q \leftarrow p) \leftarrow q$	Paradoxie der Replikation
• $\vdash ((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q$	Gesetz des Modus ponens
• $\vdash ((p \rightarrow q) \land \neg q) \rightarrow p$	Gesetz des Modus tollens

Man kann durch eine Wahrheitswertentwicklung zeigen, dass die obigen Aussagen allgemeingültig (d.h. tautologisch) sind.

Paradoxien der Implikation

Die "Paradoxien der Implikation" sind eine Gruppe von Formeln der Aussagenlogik, die zwar Tautologien, aber intuitiv problematisch sind. Die Ursache der Paradoxien liegt darin, dass die Interpretation der Wahrheit einer Implikation in der natürlichen Sprache nicht ihrer formalen Interpretation in der klassischen Logik durch Wahrheitstabellen entspricht.

Tabelle der wichtigsten Paradoxien der Implikation

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Paradoxien der Implikation:

- $(\neg p \land p) \rightarrow q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- $p \rightarrow (q \lor \neg q)$

- $(p \rightarrow \neg p) \vee (\neg p \rightarrow p)$
- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Dass alle diese Formeln Tautologien sind, kann man mit der Methode der Wahrheitstabelle überprüfen. Es geht aber auch noch etwas einfacher und Schneller: Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann nicht wahr, wenn p wahr, aber q falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Paradoxien der Replikation

Die "Paradoxien der Replikation" sind eine Gruppe von Formeln der Aussagenlogik, die zwar Tautologien, aber intuitiv problematisch sind. Die Ursache der Paradoxien liegt darin, dass die Interpretation der Wahrheit einer Replikation in der natürlichen Sprache nicht ihrer formalen Interpretation in der klassischen Logik durch Wahrheitstabellen entspricht.

Tabelle der wichtigsten Paradoxien der Replikation

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Paradoxien der Replikation:

- $p \leftarrow (\neg q \wedge q)$
- $(q \leftarrow p) \leftarrow q$
- $(p \leftarrow q] \leftarrow \neg q)$
- $(p \vee \neg p) \leftarrow q$
- $(p \leftarrow \neg p) \vee (\neg p \leftarrow p)$
- $(p \leftarrow q) \vee (q \leftarrow p)$

Dass alle diese Formeln Tautologien sind, kann man mit der Methode der Wahrheitstabelle überprüfen. Es geht aber auch noch etwas einfacher und schneller: Im Falle der 6. Formel oben z.B. ist der erste Teil der Disjunktion nur dann nicht wahr, wenn q wahr, aber p falsch ist. In diesem Fall ist aber der zweite Teil der Disjunktion wahr.

Paradoxien der Äquivalenz

Die "Paradoxien der Äquivalenz" sind eine Gruppe von Formeln der Aussagenlogik, die zwar Tautologien, aber intuitiv problematisch sind. Die Ursache der Paradoxien liegt darin, dass die Interpretation der Wahrheit einer Äquivalenz in der natürlichen Sprache nicht ihrer formalen Interpretation in der klassischen Logik durch Wahrheitstabellen entspricht.

Tabelle der wichtigsten Paradoxien der Äquivalenz

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Paradoxien der Äquivalenz:

- $(p \leftrightarrow \neg p) \vee (\neg p \leftrightarrow p)$
- $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

Dass alle diese Formeln Tautologien sind, kann man mit der Methode der Wahrheitstabelle überprüfen.

Äquivalenzen in der Aussagenlogik

Zwei logische Ausdrücke α und β heißen logisch äquivalent (in Zeichen: $\alpha \Leftrightarrow \beta$), wenn sie die gleiche Wahrheitswertentwicklung besitzen, oder anders gesagt, wenn der Ausdruck $\alpha \Leftrightarrow \beta$ eine Tautologie ist.

Tabelle der wichtigsten Äquivalenzen der Aussagenlogik

Die folgende Tabelle gibt einige wichtige logisch äquivalente Ausdrücke der Aussagenlogik wieder:

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$ Subjunktion der Implikation
- $p \leftarrow q \Leftrightarrow \neg q \lor p$ Subjunktion der Replikation
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ Kontraposition der Implikation
- $p \leftarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftarrow \neg q$ Kontraposition der Replikation
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$ Bisubjunktion
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \leftarrow q) \land (q \leftarrow p)$ Bisubjunktion
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \lor \neg q)$ Bisubjunktion
- $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$ Kommutativgesetz der Distribution
- $p \land q \Leftrightarrow q \land p$ Kommutativgesetz der Konjunktion
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$ Morgansche Regel
- $p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$ Verschmelzungsgesetz (Absorption)
- $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$ Verschmelzungsgesetz (Absorption)
- $(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r)$ Assoziativgesetz
- $(p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r)$ Assoziativgesetz
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$ Assoziativgesetz
- $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$ Distributivgesetz
- $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$ Distributivgesetz
- $(p \land q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ Exportation

Man kann durch eine Wahrheitswertentwicklung zeigen, dass die obigen Äquivalenten gültig sind.

Anwendungen

Eigentlich würde jetzt das weite Feld der Anwendungen folgen. Das würde aber den Rahmen dieser elementaren Einführung sprengen. Es sei lediglich auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Logisches Schließen

Induktive und deduktive Schlüsse

Die "Syllogismen" (von altgriechisch συν-λογισμός syllogismos: '[das] Zusammenrechnen', 'logischer Schluss') sind ein Katalog bestimmter Typen "logischer Schlüsse". Sie bilden den Kern der im vierten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung entstandenen antiken Logik des Aristoteles und der traditionellen Logik bis ins 19. Jahrhundert. Als Haupttechnik der Logik wurde der syllogistische Ansatz durch die Integration der Logik in die Mathematik (mit den Arbeiten von George Boole und Gottlob Frege im 19. und frühen 20. Jahrhundert) abgelöst.

Syllogistische Argumente sind immer nach dem gleichen Muster aufgebaut. Jeweils zwei Prämissen (Voraussetzungen), genannt Obersatz (lateinisch propositio major) und Untersatz (lateinisch propositio minor), führen zu einer Konklusion (Schlussfolgerung, lateinisch conclusio).

Innerhalb eines Syllogismus werden insgesamt drei verschiedene Begriffe verwendet:

- der *Oberbegriff* (lateinisch *terminus major*), der im Obersatz und auf der rechten Seite der Konklusion, d. h. als deren Prädikat (P) vorkommt;
- der *Unterbegriff* (lateinisch *terminus minor*), der im Untersatz und auf der linken Seite der Konklusion, d. h. als deren Subjekt (S) vorkommt; und
- der *Mittelbegriff* (M) (lateinisch *terminus medius*), der im Obersatz und im Untersatz, nicht aber in der Konklusion vorkommt.

In der Nachfolge von Johannes Philoponus wird den Bezeichnungen „Oberbegriff“ und „Unterbegriff“ seit dem 17. Jahrhundert mehrheitlich keinerlei inhaltliche Bedeutung beigemessen und sie werden ausschließlich aus ihrem Auftreten im Obersatz beziehungsweise im Untersatz und als Prädikat beziehungsweise Subjekt der Konklusion erklärt.

Man unterscheidet seit Aristoteles zwischen induktiven Schlüssen und deduktiven Schlüsen.

Induktive Schlüsse

Schematische Darstellung des Zusammenhangs von Theorie, Empirie, Induktion und Deduktion, wie er klassisch vertreten wird

Die "Induktion" (lat. *inducere*: 'herbeiführen', 'veranlassen', 'einführen') bedeutet seit Aristoteles den abstrahierenden Schluss aus beobachteten Phänomenen auf eine allgemeinere Erkenntnis, etwa einen allgemeinen Begriff oder ein Naturgesetz.

Der Ausdruck wird als Gegenbegriff zu Deduktion verwendet. Eine Deduktion schließt aus gegebenen Voraussetzungen auf einen speziellen Fall, Induktion hingegen ist der umgekehrte Weg. Wie dieser genau zu bestimmen ist, wurde besonders seit Mitte des 20. Jahrhunderts kontrovers diskutiert; ebenso die Frage, ob Induktion und Deduktion tatsächlichen Erkenntnisprozessen im Alltag oder in der Wissenschaft entsprechen oder ob es sich um Artefakte der Philosophie handelt.

David Hume vertrat die Position, dass es eine Induktion im Sinne eines Schlusses auf allgemeine und notwendige Gesetze, der zwingend und erfahrungserweiternd ist, nicht geben kann. Im 20. Jahrhundert haben Theoretiker, wie Hans Reichenbach und Rudolf Carnap, versucht, formal exakte Theorien des induktiven Schließens zu entwickeln. Karl Popper hat vehement zu zeigen versucht, dass Induktion eine Illusion sei, dass in Wirklichkeit immer nur Deduktion zum Einsatz käme und dass sie auch ausreichend sei. Er erhob bis zu seinem Tode den kontroversen Anspruch, mit seinem deduktiven methodologischen Ansatz das Induktionsproblem tatsächlich und endgültig gelöst zu haben.

Deduktive Schlüsse

Die "Deduktion" (lateinisch deductio: 'Abführen', 'Fortführen', 'Ableitung'), auch **deduktive Methode** oder **deduktiver Schluss**, ist in der Philosophie und der Logik eine Schlussfolgerung gegebener Prämissen auf die logisch zwingenden Konsequenzen. Deduktion ist schon bei Aristoteles als „Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere“ verstanden worden, d. h. der Vererbung von Eigenschaften, die alle Mitglieder einer Gruppe teilen, auf echte Untermengen und einzelne Elemente. Dem stellt Aristoteles die Induktion als Gewinnung von allgemeinen Aussagen aus der Betrachtung mehrerer Einzelfälle, und die Abduktion oder Apagoge gegenüber, die feststellt, dass bestimmte Einzelfälle unter eine gegebene oder noch zu entdeckende allgemeine Regel fallen.

Wichtige Schlussregeln

Bei Wikipedia heißt es:

"Eine "Schlussregel" (oder Inferenzregel) bezeichnet eine Transformationsregel (Umformungsregel) in einem Kalkül der formalen Logik, d. h. eine syntaktische Regel, nach der es erlaubt ist, von bestehenden Ausdrücken einer formalen Sprache zu neuen Ausdrücken überzugehen. Dieser regelgeleitete Übergang stellt eine Schlussfolgerung dar."

Im Folgenden sollen die wichtigsten Schlussregeln für das deduktive Schließen vorgestellt werden.

Modus ponens (MP)

Der "Modus ponens" ist eine schon in der antiken Logik bekannte Schlussfigur, die in der klassischen Logik als Schlussregel eine wichtige Rolle spielt.

Der Modus ponens erlaubt es, aus zwei Aussagen der Form Wenn A, dann B und A (den beiden Prämissen der Schlussfigur) eine Aussage der Form B (die Konklusion der Schlussfigur) herzuleiten.

Modus ponens der Implikation

Aus den Prämissen

$$A \rightarrow B$$

und

$$A$$

folgt die Konklusion

$$B$$

Beispiel:

Aus den Voraussetzungen *"Wenn es regnet, wird die Straße nass"* und *"Es regnet2* folgt logisch: *"Die Straße wird nass"*.

Modus ponens der Replikation

Aus den Prämissen

$A \leftarrow B$

und

B

folgt die Konklusion

A

Beispiel:

Aus den Voraussetzungen *"Ich esse nur, wenn ich Hunger habe"* und *"Ich esse gerade"* folgt logisch: *"Dann habe ich jetzt auch Hunger"*.

Modus tollens (MT)

Der "Modus tollens" ist eine Schlussfigur, die in der klassischen Logik als Schlussregel eine wichtige Rolle spielt.

Der Modus tollens besagt, dass aus den Voraussetzungen Wenn A, dann B und nicht B auf nicht A geschlossen werden kann.

Modus tollens der Implikation

Aus den Prämissen

$A \rightarrow B$

und

$\neg B$

folgt die Konklusion

$\neg A$

Beispiel:

Aus den Voraussetzungen *"Wenn es regnet, wird die Straße nass"* und *"Dei Straße ist nicht nass"* folgt logisch: *"Es hat nicht geregnet"*.

Modus tollens der Replikation

Aus den Prämissen

$A \leftarrow B$

und

$\neg A$

folgt die Konklusion

$\neg B$

Beispiel:

Beispiel:

Aus den Voraussetzungen *"Ich esse nur, wenn ich Hunger habe"* und *"Ich habe jetzt keinen Hunger"* folgt logisch: *"Ich möchte jetzt auch nicht essen"*.

Notwendige und hinreichende Bedingung

Seien A und B Sachverhalte;

(1) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): "immer" wenn A, dann B (Implikation); dann heißt A hinreichende Bedingung für B.

(2) Wenn gilt (d.h., wenn wahr ist): "nur" wenn A, dann B (Replikation); dann heißt A notwendige Bedingung für B

Im Falle begrifflicher Abhängigkeitsverhältnisse erlaubt die Kenntnis, dass A hinreichend für B den Schluss, dass B notwendig für A ist, und umgekehrt.

Kettenschluss oder hypothetischer Syllogismus (HS)

Aus den Prämissen

$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$

folgt die Konklusion

$A \rightarrow C$

Der Kettenschluss hat immer die gleiche Form: Wenn A B ist, und wenn B C ist, dann ist auch A C. Dieser Kettenschluss entspricht praktisch dem Modus Barbara in der Syllogistik.[9]

Beispiel 1: Alle Apfelbäume sind Pflanzen und alle Pflanzen sind Lebewesen. Dann sind auch alle Apfelbäume Lebewesen.

Beispiel 2: Alle Quadrate sind Rechtecke und alle Rechtecke sind Vierecke. Dann sind auch alle Quadrate Vierecke.

Disjunktiver Syllogismus (DS)

(auch adjunktiver Syllogismus oder Modus tollendo ponens genannt)

Aus den Prämissen

$A \lor B$
$\neg A$

folgt die Konklusion

B

Die Umkehrung gilt hingegen nicht:

Aus den Prämissen

$A \lor B$
A

folgt "nicht" die Konklusion

$\neg B$

Beispiel 1 für einen gültigen Disjunktiven Syllogismus: Entweder die Sonne Scheint, oder es ist bewölkt. Die Sonne scheint nicht. Dann ist es bewölkt.

Beispiel 2: Peter fährt mit der Bahn oder mit dem Auto in den Urlaub. Er währt nicht mit der Bahn. Dann fährt er mit dem Auto.

Konjunktiver Syllogismus (KS)

(auch Modus ponendo tollens genannt)

Aus den Prämissen

$\neg (A \land B)$
A

folgt die Konklusion

$\neg B$

Es wird also - inhaltlich gesprochen - aus dem Wissen, dass zwei bestimmte Sachverhalte nicht zugleich bestehen können, dass aber einer der beiden Sachverhalte sehr wohl besteht, darauf geschlossen, dass der andere der beiden nicht vorliegt.

Beispiel: Martin war gestern nicht sowohl bei Petra, als auch bei Karin. Er war gestern bei Petra. Also war er nicht bei Karin.

Konjunktionsbeseitigung (KB)

Aus der Prämisse

$A \land B$

folgt die Konklusion

A

Oder:

Aus der Prämisse

$A \land B$

folgt die Konklusion

B

Dieser Regel liegt die bereits bekannte Tautologie $\vdash (p \land q) \rightarrow p$ zu Grunde.

Konjunktionseinführung (KE)

Aus den Prämissen

A
B

folgt die Konklusion

$A \wedge B$

Im Laufe eines logischen Beweises kann man zwei Prämissen oder bereits bewiesene Sätze stets durch eine Konklusion verbinden.

Disjunktionseinführung (DE)

Aus der Prämisse

A

folgt die Konklusion

$A \vee B$

Dieser Shluss folgt aus dem Satz (der Tautologie) $\vdash p \rightarrow (p \wedge q)$

Widerspruchsregel (WR)

(auch indirekter Beweis oder "reductio ad absurdum")

Aus der Prämisse

$A \rightarrow (B \wedge \neg B)$

Folgt die Konklusion

$\neg A$

Wenn aus einer Annahme A ein Widerspruch : $B \wedge \neg B$ abgeleitet werden kann, dann muss die Annahme A falsch sein.

Klassisches Dilemma (KD)

Aus den Prämissen

$A \vee B$
$A \rightarrow C$
$B \rightarrow C$

folgt die Konklusion

C

Beispiel: Aus den Prämissen

Im Winder regnet es oder es schneit.
Wenn es regnet, ist die Straße glatt.
Wenn es schneit, ist die Straße (auch) glatt.

folgt die Konklusion

Im Winder ist die Straße glatt.

Der Logikkalül

Die ganzen hier vorgestellten deduktiven Schlussregeln sind erforderlich, wenn man komplette formale Beweise durchführen möchte. Das macht man üblicher Weise in einem sogenannten "Logikkalkül" Wie man das macht, würde aber den Rahmen dieser elementaren Einführung sprengen. Es sei lediglich auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Die "Prädikatenlogik" bzw. "Quantorenlogik" wurde unabhängig voneinander von Frege in seiner berühmten *Begriffsschrift* und von Peirce entwickelt. Genau genommen handelt es sich um eine ganze Familie von Theorien, die ein Wichtiges Teilgebiet der Logik, aber auch der Mathematik darstellt. Bei der Prädikatenlogik zerlegt man, anders als in der Aussagenlogik, elementare Aussagensätze (Wittgenstein) in Subjekt und Prädikat, für die je ein eigenes Symbol gewählt wird. Das Besondere ist, dass man diese symbolischen Elementaraussagen durch so genannte "Quantoren" ergänzt. Man unterscheidet einen Allquantor ("Alle Menschen sind sterblich") und einen Existenzqunator ("Einige Äpfel sind grün"). Auf diese Weise sind differenziertere logische Aussagen möglich als mit der bloßen Aussagenlogik, und daher stellt die Prädikatenlogik auch eine Erweiterung der Aussagenlogik dar.

Subjekt und Prädikat

Thomas Zoglauer schreibt in seiner "Einführung in die formale Logik für Philosophen":

"Während man in der Aussagenlogik Aussagen und deren Verknüpfung untersucht, untersucht man in der Prädikatenlogik die innere Struktur von Aussagesätzen. Es zeigt sich nämlich, dass jede elementare Aussage aus einem *Subjekt* und einem *Prädikat* besteht."

Beispiele:

Eva (Subjekt) ist (Kopula) hübsch (Prädikat).

Die Erde (Subjekt) ist (Kopula) eine Kugel (Prädikat).

Der Apfel (Subjekt) ist (Kopula) rund (Prädikat).

Das Auto (Subjekt) ist (Kopula) schnell (Prädikat).

Das Wetter (Subjekt) ist (Kopula) schön (Prädikat).

Die allgemeine Form eines Aussagesatzes sieht also "so" aus:

S ist ein P. = P ist eine Eigenschaft von S.

S ist ein P. = P ist ein Merkmal von S.

S ist ein P. = S befindet sich im Zustand P.

"S ist das *Subjekt*. Es ist ein singulärer Term (Eigenname) und bezeichnet ein individuelles Objekt. (Subjekt als Zugrundeliegendes, als Träger einer Eigenschaft) Das Subjekt ist der Teil des Satzes, über den etwas ausgesagt wird. P ist das *Prädikat*. Es ist ein allgemeiner Term (Begriff) und bezeichnet eine Eigenschaft."

Subjekt
\-----------------------
Ding
Substanz
etwas bezeichnen
referenzielle Funktion
singularer Term

Prädikat

Eigenschaft(en)
Akzidenz
etwas beschreiben
deskriptive Funktion
genereller Term

Formalisierung

Zur Unterscheidung von Subjekt und Prädikat bezeichnen wir Subjekte künftig mit eine kleinen "x" in Verbindung mit einem großen Buchstaben und Prädikate nur mit großen Buchstaben (A, B, C, ... P, Q, R, usw.).

Beispiel: Als Subjekt sei A(x) Apfel und als Prädikate seien R = rot und G = wohlschmeckend gegeben. Damit können wir folgende Stammformen bilden:

Der Apfel ist rot. = $A (x) \rightarrow R (x)$

Lies: Wenn dieses x ein Apfel ist, dann ist er rot.

Der Apfel schmeckt gut. = $A (x) \rightarrow G (x)$

Lies: Wenn dieses x ein Apfel ist, dann schmeckt er gut.

Der Rennwagen ist schnell. = $R (x) \rightarrow S (x)$

Lies: Wenn dieses x ein Rennwagen ist, ist er schnell.

Quantoren

Ein *Quantor* oder *Quantifikator*, die Re-Latinisierung des von Charles Sanders Peirce eingeführten Ausdrucks "quantifier", ist ein Operator der Prädikatenlogik. Neben den Junktoren sind die Quantoren Grundzeichen der Prädikatenlogik. Allen Quantoren gemeinsam ist, dass sie Variablen binden.

Die beiden gebräuchlichsten Quantoren sind der *Existenzquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als "mindestens ein" ausgedrückt) und der *Allquantor* (in natürlicher Sprache zum Beispiel als „alle“ oder "jede/r" ausgedrückt). Andere Arten von Quantoren sind *Anzahlquantoren* wie "ein", "zwei" oder "kein", die sich auf Existenz- beziehungsweise Allquantor zurückführen lassen, und Quantoren wie "manche", "einige" oder "viele", die auf Grund ihrer Unbestimmtheit in der klassischen Logik nicht verwendet werden.

Die Lesart der Quantoren

Der Allquantor: "alle x":

$\forall x$

Der Existenzquantor: "einige x":

$\exists x$

Wahrheitsbedingungen

Die Aussage $\exists x F (x)$ ist wahr, wenn es mindestens ein x gibt, das die Eigenschaft F hat. Die Aussage ist also auch dann wahr, wenn alle x F sind *und* die Grundmenge, über die quantifiziert wird, nicht leer ist. Die Aussage $\forall x F(x)$ ist wahr, wenn alle x F sind, sonst falsch.

Typen von Urteilen

Eine Aussage in einem Syllogismus, ein kategorisches Urteil, setzt immer zwei Begriffe in eine Beziehung. Dabei werden nur vier Typen von Urteilen bezüglich der Beziehung zwischen einem Subjekt (S) und einem Prädikat (P) betrachtet:

Typ	Bezeichnung	Formulierungen des Urteils	Kurzschreibweise
A	allgemein bejahendes Urteil alle S sind P (und es gibt tatsächlich S) P kommt allem S zu		$\forall x P(x)$
E	allgemein verneinendes Urteil kein S ist P (und es gibt tatsächlich S) P kommt keinem S zu		$\forall x \neg P(x)$
I	partikulär bejahendes Urteil einige S sind P P kommt einigem S zu		$\exists x P(x)$
O	partikulär verneinendes Urteil einige S sind nicht P P kommt einigem S nicht zu		$\exists x \neg P(x)$

Die Vokale stammen dabei aus den lateinischen Worten "**a** f f **i** r m o" (ich bejahe) und "n **e** g **o**" (ich verneine), wobei jeweils der erste Vokal für ein allgemeines, der zweite für ein partikuläres Urteil steht.

Quantität und Qualität Die Eigenschaft einer Aussage, über wie viele Gegenstände sie spricht, wird traditionell die "Quantität" dieser Aussage genannt. In diesem Sinn gibt es im Syllogismus zwei Quantitäten, nämlich (a) partikulär und (b) universell oder allgemein. Die Eigenschaft einer Aussage, einem Subjekt ein Prädikat zu- oder abzusprechen, wird traditionell die "Qualität" dieser Aussage genannt. Spricht eine Aussage einem Subjekt ein Prädikat zu, nennt man sie bejahende Aussage, spricht sie es ihm ab, verneinende Aussage. Die Typen von Aussagen sind in folgender Tabelle nach ihrer Qualität und Quantität aufgeschlüsselt:

	bejahend	**verneinend**
allgemein	A-Urteil	E-Urteil
partikulär	I-Urteil	O-Urteil

Logisches Quadrat der Urteile

Das logische Quadrat

Zwischen den unterschiedlichen Aussagentypen bestehen verschiedene Beziehungen, und zwar wie folgt:

- Zwei Aussagen bilden einen *kontradiktorischen Gegensatz* genau dann, wenn beide weder gleichzeitig wahr noch gleichzeitig falsch sein können, mit anderen Worten: Wenn beide unterschiedliche Wahrheitswerte haben müssen. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn die eine Aussage die Negation der anderen ist (und umgekehrt). Für die syllogistischen Aussagentypen trifft das kontradiktorische Verhältnis auf die Paare A–O und I–E zu.
- Zwei Aussagen bilden einen *konträren Gegensatz* genau dann, wenn sie zwar nicht beide zugleich wahr, wohl aber beide falsch sein können. In der Syllogistik steht nur das Aussagenpaar A–E in konträrem Gegensatz.
- Zwei Aussagen bilden einen *subkonträren Gegensatz* genau dann, wenn nicht beide zugleich falsch (wohl aber beide zugleich wahr) sein können. In der Syllogistik steht nur das Aussagenpaar I–O in subkonträrem Gegensatz.
- Zwischen den Aussagetypen A und I einerseits und E und O andererseits besteht ein *Folgerungszusammenhang* (traditionell wird dieser Folgerungszusammenhang im logischen Quadrat *Subalternation* genannt): Aus A folgt I, d. h. wenn alle S P sind, dann gibt es auch tatsächlich S, die P sind; und aus E folgt O, d. h. wenn keine S P sind, dann gibt es tatsächlich S, die nicht P sind.

Diese Zusammenhänge werden oft in einem Schema, das unter dem Namen "Logisches Quadrat" bekannt wurde, zusammengefasst (siehe Abbildung). Die älteste bekannte Niederschrift des logischen Quadrats stammt aus dem zweiten nachchristlichen Jahrhundert und wird Apuleius von Madauros zugeschrieben.

Allgemeine Übersetzungsregeln

Hier nun die allgemeinen Übersetzungsregeln für nicht-komplexe Aussageformenormen mit "P" als Prädikatorvariablen und "x" als Gegenstandsvariable:

- $\forall x P(x)$ Für jedes x gilt: x ist P (alle x sind P).
- $\forall x \neg P(x)$ Für jedes x gilt: x ist nicht P (kein x ist P).
- $\exists x P(x)$ Für einige x gilt: x ist P (einige x sind P).
- $\exists x \neg P(x)$ Für einige x gilt: x ist nicht P (einige x sind nicht P).

Klammern und Klammerregeln

Die Klammern haben eigentlich die gleiche Bedeutung wie in der Mathematik. Die Ausdrücke in den Klammern werden zuerst ausgewertet. Ausdrückliche Klammerregeln sind wohl wenig sinnvoll, denn grundsätzlich muss es möglich sein, die Klammen frei zu setzen, und wenn ich eine Veränderung der Klammersetzung vornehme, ergibt sich auch eine komplett andere Aussage. Wir wollen es in dieser Einführung so handhaben, dass "immer" Klammern gesetzt werden, wo es sinnvoll ist.

Übersetzungen von komplexen Formeln

Einige allgemeine Übersetzungsregeln für komplexe Formeln lauten:

- $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ Für jedes x gilt: Wenn x P ist, dann ist x (auch) Q (alle P's sind Q. Beispiel: Alle Menschen sind sterblich.
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ Für jedes x gilt: Wenn x P ist, dann ist x nicht Q (kein P ist Q). Beispiel: Kein Affe ist ein Fisch.
- $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ Für einige x gilt: x ist P und x ist Q (einige P's sind Q). Beispiel: Einige Männer sind intelligent.

- $\exists$ x (P (x) $\rightarrow$ ¬ Q (x))   Für einige x gilt: x ist P und x ist nicht Q (einige P's sind nicht Q). Beispiel: Einige Männer sind nicht intelligent.

Die prädikatenlogisch Form

Die einfachste *prädikatenlogische Form* einer Aussage erhält man durch Einsetzung von Prädikatorvariablen für alle Prädikatoren der Aussage, durch Einsetzung von Quantoren für die Ausdrücke "alle", "einige" und "keines" mit geeigneter Quantifizierung sowie durch geeignete Klammersetzung zur sinngemäßen Gliederung komplexer Aussagen.

Beispiele für die Herstellung prädikatenlogischer Formen

Hier sind einige Beispiel für die Herstellung *prädikatenlogischer Formen*:

Beispiele:Alles lebt. $\forall$ x L (x)

- Einiges ist unerträglich. $\exists$ x U (x)
- Nichts hält ewig. $\forall$ x ¬ E (x)
- Menschen sind fähig, zu weinen. $\forall$ x ((M (x) $\rightarrow$ W (x))
- Alle Menschen sind sterblich. $\forall$ x ((M (x) $\rightarrow$ S (x))
- Einige Menschen sind genial ($\exists$ x) ((M (x) $\rightarrow$ G (x))
- Kein Tier ist dumm. $\forall$ x ((T (x) $\rightarrow$ ¬ D (x))
- Einige Männer sind keine Machos. $\exists$ x ((M 1 (x) $\rightarrow$ ¬ M 2 (x))
- Alle Frauen sind intelligent. ($\forall$ x) ((F (x) $\rightarrow$ I (x))
- Keine Frau ist Intelligent. $\forall$ x ((F (x) $\rightarrow$ ¬ I (x))
- Alle Kernkraftwerke sind gefährlich. $\forall$ x ((K (x) $\rightarrow$ G (x))
- Kein Politiker ist ehrlich. $\forall$ x ((P (x) $\rightarrow$ ¬ E (x))
- Einige Manager sind unberechenbar. $\exists$ x ((M (x) $\rightarrow$ U (x))
- Nicht alle Raucher sterben an Krebs. ¬ $\forall$ x ((R (x) $\rightarrow$ K (x))
- Einige Philosophen finden keine Arbeit. $\exists$ x ((P (x) $\rightarrow$ ¬ A (x))
- Alles ist Substanz oder Attribut, und Modi sind nicht Substanzen, also sind Modi Attribute. $\forall$ x (S (x) $\vee$ A (x)) $\wedge$ $\forall$ x (M (x) $\rightarrow$ ¬ S (x)) $\Rightarrow$ $\forall$ x (M (x) $\rightarrow$ A (x))
- Alle Menschen sind sterblich, und alle Philosophen sind Menschen, also sind (auch) alle Philosophen sterblich. (Modus Barbara) $\forall$ x (M (x) $\rightarrow$ S (x)) $\wedge$ $\forall$ x (P (x) $\rightarrow$ M (x)) $\Rightarrow$ $\forall$ x (P (x) $\rightarrow$ S (x))
- Alle A sind B, und alle B sind C, also sind (auch) alle A C. (Modus Barbara) $\forall$ x (A (x) $\rightarrow$ B (x)) $\wedge$ $\forall$ x (B (x) $\rightarrow$ C (x)) $\Rightarrow$ $\forall$ x (A (x) $\rightarrow$ C (x))

Rückverwandlung in die sprachliche Form

Wir können natürlich auch gegebene Formeln durch Ersetzen der Variablen durch konkrete Ausdrücke in konkrete Aussagen verwandeln. Einige dieser Ersetzungen werden zu wahren Aussagen führen, andere zu falschen Aussagen.

Beispiele:

- $\forall$ x ((P (x) $\rightarrow$ (Q (x) $\vee$ R (x)) heißt für P = Mann, Q = aggressiv, R = feige: Alle Männer sind aggressiv oder feige. (wahr oder falsch?)
- $\forall$ x (P (x) $\rightarrow$ Q (x)) $\rightarrow \neg$ (K x) (P (x) $\wedge \neg$ R (x)) heißt für P = Mensch, Q = Gefühle haben, R = Bewusstsein haben: Wenn alle Menschen Gefühle haben, dann gibt es keinen Menschen, der kein Bewusstsein hat. (wahr)
- $\forall$ x (P (x) $\wedge$ Q (x)) $\rightarrow$ R (x) heißt für P = Politiker, Q = schlau, R = reich werden: Alle schlauen Politiker werden reich. (wahr oder falsch?)
- $\exists$ x ((P (x) $\rightarrow$ (Q (x) $\vee$ R (x)) heißt für P = Frau, Q = mathematisch interessiert, R = naturwissenschaftlich interessiert: Einige Frauen sind mathematisch oder naturwissenschaftlich interessiert. (wahr)

Es sollte klar geworden sein, dass es in der Prädikatenlogik darum geht, mit den logischen Formeln genau so logisch zu folgern, wie wir dies bei der Aussagenlogik und dem logischen Schließen schon kennengelernt haben.

Anwendungen

Eigentlich würde jetzt das weite Feld der Anwendungen folgen. Das würde aber den Rahmen dieser elementaren Einführung sprengen. Es sei lediglich auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Urteilslehre und Syllogistik

Urteile

Ein "Urteil" ist in der Logik die Form einer Feststellung, die in der sprachlichen Form eines Satzes ausgedrückt wird. Dabei wird das Urteil mit dem Vorgang der Bildung der Feststellung, ihrem propositionalen Gehalt oder der Bewertung dieses Gehalts identifiziert (*ein Urteil bilden* vs *ein Urteil treffen* vs *ein Urteil fällen*). Das Urteil wird als ein Grundbegriff der Logik nicht in jeder Theorie der Logik ausdrücklich definiert.

Unterschiedliche Standpunkte bestehen hinsichtlich der Frage, ob und inwiefern eine psychologische Betrachtung des Denkprozesses (etwa in Assoziationspsychologie) für die Urteilstheorie eine Rolle spielen bzw. daneben überhaupt eine selbstständige Urteilstheorie möglich ist (Psychologismus). Schließlich beeinflussen erkenntnistheoretische oder ontologische Annahmen (wie schon bei Aristoteles deutlich wird) mitunter sehr stark die Ausgestaltung einer jeden Logik-Konzeption.

In der traditionellen Logik ist „Urteil“ ein Grundbegriff, der eine bestimmte Sicht der logischen Aussage bezeichnet. Jede logische Aussage – jedes *Urteil* – spricht einem logischen Subjekt eine allgemeinere Bestimmung – ein logisches Prädikat – zu. Spätestens die klassische Logik geht jedoch davon aus, dass es neben der Prädikation auch komplexere Urteilsformen geben muss, und dass nicht jede gebildete Prädikation einen Wahrheitswert hat, sondern erst der vollständige Satz.

Typen von Urteilen

Eine Aussage in einem Syllogismus, ein kategorisches Urteil, setzt immer zwei Begriffe in eine Beziehung. Dabei werden nur vier Typen von Urteilen bezüglich der Beziehung zwischen einem Subjekt (S) und einem Prädikat (P) betrachtet:

Typ	**Bezeichnung**	**Formulierungen des Urteils**	**Kurzschreibweise**
A	allgemein bejahendes Urteil alle S sind P (und es gibt tatsächlich S) P kommt allem S zu		SaP
E	allgemein verneinendes Urteil kein S ist P (und es gibt tatsächlich S) P kommt keinem S zu		SeP
I	partikulär bejahendes Urteil einige S sind P P kommt einigem S zu		SiP
O	partikulär verneinendes Urteil einige S sind nicht P P kommt einigem S nicht zu		SoP

Die Vokale stammen dabei aus den lateinischen Worten "**a** f f **i** r m **o**" (ich bejahe) und "n **e** g **o**" (ich verneine), wobei jeweils der erste Vokal für ein allgemeines, der zweite für ein partikuläres Urteil steht.

Quantität und Qualität

Die Eigenschaft einer Aussage, über wie viele Gegenstände sie spricht, wird traditionell die "Quantität" dieser Aussage genannt. In diesem Sinn gibt es im Syllogismus zwei Quantitäten, nämlich (a) partikulär und (b) universell oder allgemein. Die Eigenschaft einer Aussage, einem Subjekt ein Prädikat zu- oder abzusprechen, wird traditionell die "Qualität" dieser Aussage genannt. Spricht eine Aussage einem Subjekt ein Prädikat zu, nennt man sie bejahende Aussage, spricht sie es ihm ab, verneinende Aussage. Die Typen von Aussagen sind in folgender Tabelle nach ihrer Qualität und Quantität aufgeschlüsselt:

	bejahend	**verneinend**
allgemein	A-Urteil	E-Urteil
partikulär	I-Urteil	O-Urteil

Logisches Quadrat der Urteile

Das logische Quadrat

Zwischen den unterschiedlichen Aussagentypen bestehen verschiedene Beziehungen, und zwar wie folgt:

- Zwei Aussagen bilden einen *kontradiktorischen Gegensatz* genau dann, wenn beide weder gleichzeitig wahr noch gleichzeitig falsch sein können, mit anderen Worten: Wenn beide unterschiedliche Wahrheitswerte haben müssen. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn die eine Aussage die Negation der anderen ist (und umgekehrt). Für die syllogistischen Aussagentypen trifft das kontradiktorische Verhältnis auf die Paare A–O und I–E zu.
- Zwei Aussagen bilden einen *konträren Gegensatz* genau dann, wenn sie zwar nicht beide zugleich wahr, wohl aber beide falsch sein können. In der Syllogistik steht nur das Aussagenpaar A–E in konträrem Gegensatz.
- Zwei Aussagen bilden einen *subkonträren Gegensatz* genau dann, wenn nicht beide zugleich falsch (wohl aber beide zugleich wahr) sein können. In der Syllogistik steht nur das Aussagenpaar I–O in subkonträrem Gegensatz.
- Zwischen den Aussagetypen A und I einerseits und E und O andererseits besteht ein *Folgerungszusammenhang* (traditionell wird dieser Folgerungszusammenhang im logischen Quadrat *Subalternation* genannt): Aus A folgt I, d. h. wenn alle S P sind, dann gibt es auch tatsächlich S, die P sind; und aus E folgt O, d. h. wenn keine S P sind, dann gibt es tatsächlich S, die nicht P sind.

Diese Zusammenhänge werden oft in einem Schema, das unter dem Namen "Logisches Quadrat" bekannt wurde, zusammengefasst (siehe Abbildung). Die älteste bekannte Niederschrift des logischen Quadrats stammt aus dem zweiten nachchristlichen Jahrhundert und wird Apuleius von Madauros zugeschrieben.

Syllogismen

Syllogistische Argumente sind immer nach dem gleichen Muster aufgebaut. Jeweils zwei Prämissen (Voraussetzungen), genannt *Obersatz* (lateinisch *propositio major*) und *Untersatz* (lateinisch *propositio minor*), führen zu einer Konklusion (Schlussfolgerung, lateinisch *conclusio*). Im hier dargestellten "kategorischen Syllogismus" (auch "assertorischer

Syllogismus" genannt) sind Prämissen und Konklusion kategorische Urteile, d. h. Aussagen, in denen einem Begriff (griechisch ὅρος – *horos*, lateinisch *terminus*), dem Subjekt, ein anderer Begriff, das Prädikat, in bestimmter Weise zu- oder abgesprochen wird. Zum Beispiel wird im kategorischen Urteil „Alle Menschen sind sterblich“ dem Subjekt "Mensch" das Prädikat "sterblich" zugesprochen. Zu beachten – und an diesem Beispiel ersichtlich – ist, dass die Wörter "Subjekt" und "Prädikat" im Zusammenhang der Syllogistik anders verwendet werden als in der traditionellen Grammatik, wo das grammatikalische Subjekt der Ausdruck „alle Menschen“ und das grammatikalische Prädikat – je nach Sichtweise – das Wort "sind" oder der Ausdruck "sind sterblich" wäre.

Innerhalb eines Syllogismus werden insgesamt drei verschiedene Begriffe verwendet:

- der *Oberbegriff* (lateinisch *terminus major*), der im Obersatz und auf der rechten Seite der Konklusion, d. h. als deren Prädikat (P) vorkommt;
- der *Unterbegriff* (lateinisch *terminus minor*), der im Untersatz und auf der linken Seite der Konklusion, d. h. als deren Subjekt (S) vorkommt; und
- der *Mittelbegriff* (M) (lateinisch *terminus medius*), der im Obersatz und im Untersatz, nicht aber in der Konklusion vorkommt.

In der Nachfolge von Johannes Philoponus wird den Bezeichnungen "Oberbegriff" und "Unterbegriff" seit dem 17. Jahrhundert mehrheitlich keinerlei inhaltliche Bedeutung beigemessen und sie werden ausschließlich aus ihrem Auftreten im Obersatz beziehungsweise im Untersatz und als Prädikat beziehungsweise Subjekt der Konklusion erklärt. Gelegentlich werden Unter- und Oberbegriff auch als Subjekt bzw. Prädikat des Syllogismus bezeichnet.

Ein Beispiel für einen gültigen Syllogismus ist Folgendes:

Der Mittelbegriff dieses Syllogismus ist der Begriff "Rechteck"; im Obersatz dieses Syllogismus tritt der Mittelbegriff als Subjekt, in seinem Untersatz als Prädikat auf. Der Unterbegriff dieses Syllogismus ist der Begriff „Quadrat;“ er tritt im Untersatz als Subjekt auf. Der Oberbegriff dieses Syllogismus ist schließlich der Begriff „Kreis;“ er tritt im Obersatz als Prädikat auf.

Die vier Figuren

Welche der drei Begriffe S, P und M in welcher Aussage des Syllogismus vorkommen müssen, ist festgelegt: Der Obersatz besteht aus P und M, der Untersatz aus S und M, die Konklusion aus S und P. Die Konklusion hat dabei immer die Form S – P, die Anordnung der Begriffe in den Prämissen kann frei gewählt werden. Die Reihenfolge, in der die Prämissen aufgeschrieben werden, ist für die Gültigkeit eines Syllogismus zwar unerheblich, dennoch wird bereits seit Aristoteles zuerst der Obersatz und im Anschluss der Untersatz genannt.

Je nach Anordnung der Begriffe in den Prämissen unterscheidet man die vier möglichen Figuren:

	1. Figur	**2. Figur**	**3. Figur**	**4. Figur**
erste Prämisse	M – P	P – M	M – P	P – M
zweite Prämisse	S – M	S – M	M – S	M – S
Konklusion	S – P	S – P	S – P	S – P

Beispiel:

Prämisse 1 (oder *Obersatz*): Alle Menschen *(M)* sind sterblich *(P)*.
Prämisse 2 (oder *Untersatz*): Alle Griechen *(S)* sind Menschen *(M)*.
Konklusion (oder *Schlusssatz*): Also sind alle Griechen *(S)* sterblich *(P)*.

Aufgrund der Stellung der Begriffe M – P, S – M, S – P erkennt man einen Syllogismus der 1. Figur.

Die prädikatenlogischen Stammformen

1. Figur

$(M (x) \rightarrow P (x)) \land (S (x) \rightarrow M (x)) \Rightarrow (S (x) \rightarrow P (x))$

2. Figur

$(P (x) \rightarrow M (x)) \land (S (x) \rightarrow M (x)) \Rightarrow (S (x) \rightarrow P (x))$

3. Figur

$(M (x) \rightarrow P (x)) \land (M (x) \rightarrow S (x)) \Rightarrow (S (x) \rightarrow P (x))$

4. Figur

$(P (x) \rightarrow M (x)) \land (M (x) \rightarrow S (x)) \Rightarrow (S (x) \rightarrow P (x))$

Jetzt müssen nur noch die Quantoren zur Stammform hinzugefügt werden, dann hat man die prädikatenlogische Form der Syllogistik.

Modi (Kombinationen) und ihre Merkwörter

Da jede der drei Aussagen in einem Syllogismus von einem der vier Typen A, E, O, I sein kann, gibt es pro Figur 4 × 4 × 4 = 64 Möglichkeiten, Aussagen zu einem Syllogismus der jeweiligen Figur zu kombinieren. Jede dieser Möglichkeiten wird ein Modus (Plural: Modi) bzw. eine Kombination der jeweiligen Figur genannt. Bei insgesamt vier verschiedenen Figuren gibt es so insgesamt 64 × 4 = 256 Kombinationsmöglichkeiten, d. h. 256 Typen von Syllogismen. Unter diesen 256 Modi sind 24 gültige und 232 nicht gültige Syllogismen.

Ein Modus wird durch drei Buchstaben beschrieben. Dabei stehen die ersten beiden Buchstaben für die Typen der Prämissen, der dritte Buchstabe für den Typ der Konklusion.

Beispiel:

> Prämisse 1 (oder *Obersatz*): Alle Krimis *(M)* sind spannend *(P)*.
> Prämisse 2 (oder *Untersatz*): Einige Bücher *(S)* sind Krimis *(M)*.
> Konklusion (oder *Schlusssatz*): Also sind einige Bücher *(S)* spannend *(P)*.
>
> Prämisse 1 ist vom Typ A, Prämisse 2 vom Typ I, die Konklusion folglich ebenfalls vom Typ I. Es handelt sich also um einen Syllogismus vom Typ A–I–I.

Die 24 gültigen Modi werden traditionell mit folgenden Merkwörtern bezeichnet:

1. Figur: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari, Celaront
2. Figur: Baroco, Cesare, Camestres, Festino, Camestrop, Cesaro
3. Figur: Bocardo, Darapti, Datisi, Disamis, Felapton, Ferison
4. Figur: Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison, Calemop

In diesen Merkwörtern bezeichnen die Vokale die Typen der Aussagen in der Reihenfolge Obersatz–Untersatz–Konklusion; zum Beispiel bezeichnet Modus Darii einen Syllogismus der ersten Figur und vom Typ A–I–I. Die Konsonanten geben an, auf welchen Syllogismus der 1. Figur (erster Konsonant) der jeweilige Syllogismus zurückgeführt werden kann und durch welche Veränderung (jeweils auf Vokal folgender Konsonant) diese Zurückführung möglich ist.

Abschließend sollten sämtliche formal gültigen Syllogismen (Schlüsse) systematisch wiedergegeben werden.

Die Schlüsse der 1. Figur

1. Modus Barbara (AAA)

$M\ a\ P \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ a\ P$

Bsp.:

Alle Menschen sind sterblich.
Alle Griechen sind Menschen.
Alle Griechen sind sterblich.

2. Modus Celarent (EAE)

$M\ e\ P \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ e\ P$

Bsp.:

Kein Mensch ist vollkommen.
Alle Studenten sind Menschen.
Kein Student ist vollkommen.

3. Modus Darii (AII)

$M\ a\ P \wedge S\ i\ M \rightarrow S\ i\ P$

Bsp:

Alle Philosophen sind verrückt.
Einige Menschen sind Philosophen.
Einige Menschen sind verrückt.

4. Modus Ferio (EIO)

$M\ e\ P \wedge S\ i\ M \rightarrow S\ o\ P$

Bsp.:

Kein Raucher lebt gesund.
Einige Jugendliche sind Raucher.
Einige Jugendliche leben nicht gesund.

5. Modus Barbari (AAI)

$M\ a\ P \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ i\ P$

Bsp.:

Alle Rechtecke sind Vierecke.
Alle Quadrate sind Rechecke.
Einige Quadrate sind Vierecke.

6. Modus Celaront (EAO)

$M\ e\ P \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ o\ P$

Bsp:

Kein Rechteck ist ein Kreis.
Alle Quadrate sind Rechtecke.
einige Quadrate sind keine Kreise.

Die Schlüsse der 2. Figur

7. Modus Cesare (EAE)

$P\ e\ M \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ e\ P$

Bsp.:

Kein Dreieck ist rund,
Alle Kreise sind rund.
Kein Kreis ist ein Dreieck.

8. Modus Camestres (AEE)

$P\ a\ M \wedge S\ e\ M \rightarrow S\ e\ P$

Bsp.:

Alle Politiker streben nach Macht.
Kein Philosoph strebt nach Macht.
Kein Philosoph ist Politiker.

9. Modus Festino (EIO)

$P\ e\ M \wedge S\ i\ M \rightarrow S\ o\ P$

Bsp.:

Kein Autofahrer ist blind.
Einige Raucher sind blind.
Einige Raucher sind keine Autofahrer

10. Modus Baroco (AOO)

$P\ a\ M \wedge S\ o\ M \rightarrow S\ o\ P$

Bsp.:

Alle Spatzen sind frech.
Einige Vögel sind nicht frech.
Einige Vögel sind keine Spatzen.

11. Modus Cesaro (EAO)

$P\ e\ M \wedge S\ a\ M \rightarrow S\ o\ P$

12. Modus Camestrop (AEO)

$P\ a\ M \wedge S\ e\ M \rightarrow S\ o\ P$

Bsp.:

Alle Vögel sind Wirbeltiere.
Kein Insekt ist ein Wirbeltier.
Einige Insekten sind kleine Vögel.

Die Schlüsse der 3. Figur

13: Modus Darapti (AAI)

$M a P \wedge M a S \rightarrow S i P$

Bsp.:

Alle Quadrate sind Rechtecke.
Alle Quadrate sind Vierecke.
Einige Vierecke sind Rechtecke.

14. Modus Disamis (IAI)

$M i P \wedge M a S \rightarrow S i P$

Bsp.:

Einige Früchte sind Äpfel.
Alle Früchte sind Pflanzen.
Einige Pflanzen sind Äpfel.

15. Modus Datisi (AII)

$M a P \wedge M i S \rightarrow S i P$

Bsp.:

Alle Rechtecke sind Vierecke.
Einige Rechtecke sind Quadrate.
Einige Quadrate sind Vierecke.

16. Modus Felapton (EAO)

$M e P \wedge M a S \rightarrow S o P$

Bsp.:

Keine Münchner sind Passauer.
Alle Münchner sind Stadtbewohner.
Einige Stadtbewohner sind keine Passauer.

17. Modus Ferison (EIO)

$M e P \wedge M i S \rightarrow S o P$

Bsp.:

Keine Münchner sind Passauer.
Einige Münchner sind Studenten.
Einige Studenten sind nicht Passauer.

18. Modus Bocardo (OAO)

$M o P \wedge M a S \rightarrow S o P$

Bsp.:

Einige Münchner sind nicht Politiker.
Alle Münchner sind Stadtbewohner.
Einige Stadtbewohner sind nicht Politiker.

Die Schlüsse der 4. Figur

19. Modus Barnalip (AAI)

$P a M \wedge M a S \rightarrow S i P$

Bsp.:

Alle Autofahrer zahlen Steuern.
Alle Steuerzahler sind unglücklich.
Einige Unglückliche sind Autofahrer.

20. Modus Camenes (AEE)

$P a M \wedge M e S \rightarrow S e P$

Bsp.:

Alle Quadrate sind Rechtecke.
Alle Rechtecke sind Vierecke.
Einige Vierecke sind Quadrate.

21. Modus Fesapo (EAO)

$P e M \wedge M a S \rightarrow S o P$

Bsp.:

Keine Passauer sind Münchner.
Alle Münchner sind Stadtbewohner.
Einige Stadtbewohner sind keine Münchner.

22. Modus Dimaris (IAI)

$P i M \wedge M a S \rightarrow S i P$

Bsp.:

Einige Rauten sind Rechtecke.
Alle Rechecke sind Parallelogramme.
Einige Parallelogramme sind Rauten.

23. Modus Fresison (EIO)

$P e M \wedge M i S \rightarrow S o P$

Bsp.:

Keine Passauer sind Münchner.
Einige Münchner sind Studenten.
Einige Studenten sind keine Passauer.

24. Modus Camenop (AEO)

$P a M \wedge M e S \rightarrow S o P$

Wesentlich verschiedene Syllogismen

Die Äquivalenzen "XeY genau dann falls YeX" und ebenso "XiY genau wenn YiX" erlauben es, Syllogismen in mehreren Paaren miteinander zu identifizieren, im EIO-Fall sogar vier, durch alle vier Figuren. Dann bleibt eine verkürzte Liste von nur sechs Syllogismen übrig, falls noch Abschwächungen gestrichen werden: Barbara, Camestres, Fesapo, Ferio, Datisi und Baroco. Hier die Übersicht:

AAA – Modus Barbara

Beispiel

	Alle Rechtecke sind Vierecke
	Alle Quadrate sind Rechtecke
Es folgt:	Alle Quadrate sind Vierecke

AEE – Modus Camestres

Beispiel

	Alle Fische atmen durch Kiemen
	Kein Säugetier atmet durch Kiemen
Es folgt:	Kein Säugetier ist ein Fisch

EAO – Modus Fesapo

Beispiel

	Keine Passauer sind Münchner
	Alle Münchner sind Stadtbewohner
Es folgt:	Einige Stadtbewohner sind keine Passauer

EIO – Modus Ferio

Beispiel

	Kein Säugetier atmet mit Kiemen
	Einige Wassertiere sind Säugetiere
Es folgt:	Einige Wassertiere atmen nicht mit Kiemen

AII – Modus Datisi

Beispiel

	Alle Rechtecke sind Vierecke
	Einige Rechtecke sind Quadrate
Es folgt:	Einige Vierecke sind Quadrate

AOO – Modus Baroco

Beispiel

Alle Fische atmet mit Kiemen

Einige Wassertiere atmen nicht mit Kiemen

Es folgt: Einige Wassertiere sind keine Fische

Neue, alternative Syllogistik

Eine gnaz neue, alternative Syllogistik würde sich nach Joachim Stiller aus dem untenstehend abgebildeten Zusammenhang ergeben, der etwas saubere gefasst ist.

Das könnte etwa auch zu einer ganz neuen, alternativen Prädikatenlogik fürhen mit jetzt "vier“ Quantoren:

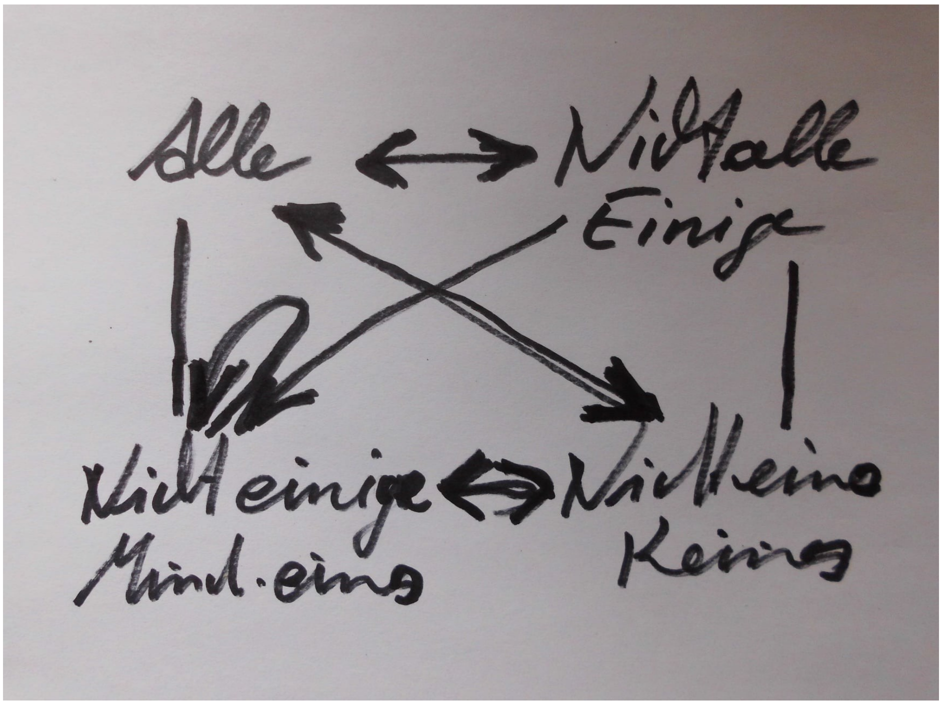
* dem Allheitsqunator A

* dem Vielheitsquantor V

* dem Einheitsqunator oder Existenzquantor E

* dem Keinheitsquantor K

(Die Buchstaben sind auf dem Kopf stehend zu schreiben...)



Literatur

Logische Propädeutik

- Ernst Tugendhat, Ursula Wolf: *Logisch-semantische Propädeutik.* (= RUB 8206). Nachdruck. Reclam, Stuttgart 2001, ISBN 3-15-008206-4.
- Wilhelm Kamlah, Paul Lorenzen: *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens.* 3. Auflage. Metzler, Stuttgart u. a. 1996, ISBN 3-476-01371-5.
- Axel Bühler: *Einführung in die Logik. Argumentation und Folgerung.* 3. Auflage. Alber, Freiburg/ München 2000, ISBN 3-495-47905-8.

Formale Logik in der Philosophie

- Jon Barwise, John Etchemendy: *The Language of First-Order Logic.* CSLI Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University 1991, ISBN 0-937073-74-1.
- Ansgar Beckermann: *Einführung in die Logik.* 3. Auflage. De Gruyter, Berlin u. a. 2011, ISBN 978-3-11-025434-1.
- Irving M. Copi: *Einführung in die Logik*. Fink, München 1998, ISBN 3-7705-3322-4.
- Wolfgang Detel: *Grundkurs Philosophie. Band 1: Logik*. Reclam, Stuttgart, 2007, ISBN 978-3-15-018468-4.
- Dov Gabbay, Franz Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic.* 16 Bände. 2. Auflage. Kluwer, Reidel, Dordrecht 2001ff.
- Paul Hoyningen-Huene: *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*. Reclam, Stuttgart 1998, ISBN 3-15-009692-8.
- Rüdiger Inhetveen: *Logik. Eine dialog-orientierte Einführung.* Ed. am Gutenbergplatz, Leipzig 2003, ISBN 3-937219-02-1.
- Franz von Kutschera, Alfred Breitkopf: *Einführung in die moderne Logik.* 8. Auflage. Alber, Freiburg 2007, ISBN 978-3-495-47977-3.
- E. J. Lemmon: *Beginning Logic.* 2. Auflage. Chapman and Hall, London 1987, ISBN 0-412-38090-0.
- Winfried Löffler: *Grundkurs Philosophie - Band 18: Einführung in die Logik*, Kohlhammer/Urban, Stuttgart 2008, ISBN 3-17-015460-5.
- Benson Mates: *Elementare Logik. Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Identität.* 2. Auflage. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1978, ISBN 3-525-40541-3.
- W.V.O. Quine: *Grundzüge der Logik*. Suhrkamp 1974, ISBN 3-518-27665-4.
- Wesley C. Salmon: *Logik.* Reclam, Stuttgart 1983, ISBN 3-15-007996-9.
- Thomas Zoglauer: *Einführung in die formale Logik für Philosophen*, Vandenhoeck & Rupert, Göttingen 2005, ISBN 3-525-05293-5.

Formale Logik in der Mathematik

- Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas: *Einführung in die mathematische Logik.* (= Spektrum-Hochschultaschenbuch). 4. Auflage. Spektrum, Akademie, Heidelberg u. a. 1998, ISBN 3-8274-0130-5.
- Donald W. Barnes, John M. Mack: *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Springer, Berlin 1975, ISBN 3-540-90109-4. (Ein sehr mathematischer Zugang zur Logik)

Formale Logik in der Informatik

- Uwe Schöning: *Logik für Informatiker.* (= Spektrum-Hochschultaschenbuch). 5. Auflage. Spektrum, Akademie, Heidelberg u. a. 2000, ISBN 3-8274-1005-3.
- Bernhard Heinemann, Klaus Weihrauch: *Logik für Informatiker. Eine Einführung.* (= Leitfäden und Monographien der Informatik). 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 1992, ISBN 3-519-12248-0.

Logik in der Medizin bzw. in der angewandten/praktischen Wissenschaft

- Wladislav Bieganski: *Medizinische Logik. Kritik der ärztlichen Erkenntnis.* Autorisierte Übersetzung der 2. Aufl. von A. Fabian, Würzburg 1909.
- Otto Lippross: *Logik und Magie in der Medizin.* München 1969.

Besondere Literaturempfehlung

Die folgenden Werke bilden die Grundlage für das hier vorgelegte Lehrbuch. Sie seien dem Leser ausdrücklich empfohlen:

- Ernst Tugendhat, Ursula Wolf: *Logisch-semantische Propädeutik.* (= RUB 8206). Nachdruck. Reclam, Stuttgart 2001, ISBN 3-15-008206-4.
- Wolfgang Detel: *Grundkurs Philosophie. Band 1: Logik*. Reclam, Stuttgart, 2007, ISBN 978-3-15-018468-4.
- Thomas Zoglauer: *Einführung in die formale Logik für Philosophen*, Vandenhoeck & Rupert, Göttingen 2005, ISBN 3-525-05293-5.
- Winfried Löffler: *Grundkurs Philosophie - Band 18: Einführung in die Logik*, Kohlhammer/Urban, Stuttgart 2008, ISBN 3-17-015460-5.
- Paul Hoyningen-Huene: *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*. Reclam, Stuttgart 1998, ISBN 3-15-009692-8.

Joachim Stiller Münster, 2017

Ende

Zurück zur Startseite